KRUMMLINIGE KOORDINATEN

[P1] *Stromfluss*

Berechnen Sie für eine Stromdichte $\vec{j} = \alpha \frac{\vec{r}}{r^3}$ den Strom $I = \int_S \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{j}(\vec{r})$ nach außen durch die Fläche $S = \{\vec{r} \doteq (x,y,z) \mid \vec{r} \cdot \vec{m} = 1\,,\ \vec{m} \doteq (1,1,1)\,,\ x,y,z > 0\}$. Die angegebene Fläche ist ein Dreieck im ersten Oktanten mit den Ecken $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

(a) Skizzieren Sie die Fläche.

(b) Parametrisieren Sie die Fläche über ihre Projektion auf die xy-Ebene, also $(t,s) \equiv (x,y)$ und $\vec{r}(x,y) \doteq (x,y,h(x,y))$.

(c) Über welchen Wertebereich F laufen x und y?

(d) Bestimmen Sie den (nicht normierten) Normalenvektor $\dot{\vec{r}} \times \vec{r}\,'$, wobei Punkt und Strich die Ableitungen nach t und s bezeichnen. Stimmt die Orientierung?

(e) Setzen Sie alles ein in die Formel $I = \int_F \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,(\dot{\vec{r}} \times \vec{r}\,') \cdot \vec{j}(\vec{r})|_{\vec{r}(x,y)}$ und vereinfachen Sie. Lassen Sie das endgültige xy-Integral stehen.

[P2] *Koordinatenwechsel*

Zwei feste nicht kollineare und nicht normierte Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in der Ebene definieren Parallelogramm-Koordinaten (u,v) über $\vec{r}(u,v) = \vec{a}\,u + \vec{b}\,v \doteq (a_1\,u + b_1\,v, a_2\,u + b_2\,v)$.

(a) Skizzieren Sie die Kurvenscharen $\vec{r}(u, v_0)$ und $\vec{r}(u_0, v)$ mit festem v_0 bzw. u_0.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, ihre Determinante sowie die Metrik $g = J^\intercal J$.

(c) Geben Sie Linien- und Flächenelement sowie $\vec{v}^{\,2} = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$ in den neuen Koordinaten an.

(d) Formulieren Sie für eine Bahnkurve $\mathcal{C} \ni \vec{r}(u(t), v(t))$ die Bogenlänge $s(1,2) = \int_1^2 \mathrm{d}s$ und die Wirkung $w(1,2) = \int_1^2 \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{p}$ mit $\vec{p} = m\,\dot{\vec{r}}$. Die hier verwendeten Notationen sind die aus der Vorlesung.